



## Concours Mathématiques et Physique Corrigé de l'épreuve de Mathématiques I

### Préliminaires

1. (a) On applique le théorème de continuité sous signe intégrale.

Soit  $f(x, s) = \frac{e^{-(1+s^2)\frac{x^2}{2}}}{1+s^2}$  définie sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

- $s \rightarrow f(x, s)$  est continue donc cpm sur  $\mathbb{R}^+$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ .
- $x \rightarrow f(x, s)$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  pour tout  $s \in \mathbb{R}^+$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $s \in \mathbb{R}^+$ ,  $|f(x, s)| \leq \frac{1}{1+s^2}$  qui est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, s) = 0$ , le théorème de convergence dominée montre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0. \text{ Autrement } 0 \leq F(x) \leq \frac{\pi}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ par suite } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

- (b) On applique le théorème de dérivation sous signe intégrale.

- $s \rightarrow f(x, s)$  est cpm intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ .
- $x \rightarrow f(x, s)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$  pour tout  $s \in \mathbb{R}^+$  et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, s) = -x e^{-(1+s^2)\frac{x^2}{2}}$$

qui est cpm sur  $\mathbb{R}^+$ .

- Pour tout  $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{*+}$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, s) \right| \leq b e^{-(1+s^2)\frac{a^2}{2}} = o\left(\frac{1}{s^2}\right)$  qui est donc intégrable.

Par suite  $F$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$  et  $F'(x) = \int_0^{+\infty} -x e^{-(1+s^2)\frac{x^2}{2}} ds$ .

On a  $F'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(sx)^2}{2}} ds$ . Par le changement de variable bijective  $u = xs$  on obtient  $F'(x) = -\alpha e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

Par suite pour tout  $x > 0$  on a  $F(x) = -\alpha \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + c$  où  $c$  est une constante. Par continuité  $F(0) = c = \frac{\pi}{2}$  donc  $F(x) = -\alpha \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{\pi}{2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ .

- (c) Quand  $x \rightarrow +\infty$  dans l'égalité précédente, on obtient  $0 = -\alpha^2 + \frac{\pi}{2}$  la positivité de  $\alpha$  montre que  $\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ . Le réel  $I_{\text{II}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\alpha = 1$ .

- (a) Si  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  alors  $\left| f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq \|f\|_{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$  qui est intégrable donc  $I_f$  est bien définie et  $|I_f| \leq \|f\|_{\infty} I_{\mathbb{I}} = \|f\|_{\infty}$ .

$\mathcal{H}$  est un hyperplan de  $C_b(\mathbb{R})$  comme noyau de la forme linéaire non nulle  $\varphi : f \rightarrow I_f$ . De plus comme  $\varphi$  est continue d'après l'inégalité précédente alors  $\mathcal{H}$  est fermé de  $C_b(\mathbb{R})$ .

- (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $t^{2n}e^{-\frac{t^2}{2}} = o(\frac{1}{t^2})$  au voisinage de  $+\infty, -\infty$ . Ce qui montre que  $I_{f_n}$  existe. On a  $I_{f_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t^{2n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t^{2n+1} (te^{-\frac{t^2}{2}}) dt$ .

Comme  $\lim_{\pm\infty} t^{2n+1} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$  alors une intégration par parties donne

$$I_{f_{n+1}} = \frac{2n+1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = (2n+1)I_{f_n}.$$

On montre par récurrence que  $I_{f_n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ . En effet  $I_{f_0} = 1$ . Si  $I_{f_n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$  alors

$$I_{f_{n+1}} = (2n+1)I_{f_n} = (2n+1) \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{(2n+2)2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

- (c) Comme  $f$  est bornée donc  $I_f$  existe. Le développement en série entière de  $f$  s'écrit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \pi^{2n} x^{2n} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} I_f &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \pi^{2n} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \pi^{2n} I_{f_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \pi^{2n} \frac{(2n)!}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{2^n n!} \\ &= e^{-\frac{\pi^2}{2}}. \end{aligned}$$

Justification de la permutation :

La suite de fonctions  $g_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \pi^{2n} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}}$  est cpm et intégrable sur  $\mathbb{R}$ . La série  $\sum g_n(x)$  converge simplement vers la fonction  $f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$  qui est cpm intégrable. La série  $\sum \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)| dx$  converge car  $\int_{\mathbb{R}} |g_n(x)| dx = \frac{1}{(2n)!} \pi^{2n} I_{f_n} = \frac{\pi^{2n}}{2^n n!}$  qui est le terme générale d'une série convergente.

3.

- (a) Méthode 1 : La fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(x) = f(\tan(x))$  pour  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  et  $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \ell$  est continue sur le compact  $[0, \frac{\pi}{2}]$  donc elle est bornée. Par suite  $|f(\tan(x))| \leq M$  pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  donc  $|f(t)| \leq M$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Méthode 2 : Par définition de la limite, il existe  $A \geq 0$  tel que  $|f(x)| \leq |\ell| + 1$  pour  $x > A$ .  $f$  est continue sur le segment  $[0, A]$  donc bornée sur  $[0, A]$ . Il s'ensuit que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

(b) On a  $\psi'(t) = \left( \frac{-e^{-\frac{1}{2}t^2}}{t} \right)' = e^{-\frac{1}{2}t^2} + \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{2}t^2} = e^{-\frac{1}{2}t^2} + o(e^{-\frac{1}{2}t^2})$ .

Comme la fonction  $e^{-\frac{1}{2}t^2}$  est positive et intégrable au voisinage de  $+\infty$  alors par le théorème d'intégration des relations de comparaison, on en déduit que

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \sim \int_x^{+\infty} \psi'(t) dt = -\psi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.$$

Par suite  $\Phi_{\mathbb{I}}(x) \sim \frac{1}{x}$ .

(c) Comme  $\Phi_{\mathbb{I}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_{\mathbb{I}}(x) = 0$  alors  $\Phi_{\mathbb{I}}$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ , d'où l'existence de  $M$ . De même pour la fonction  $x \rightarrow x\Phi_{\mathbb{I}}(x)$ .

## Un endomorphisme de $C_b(\mathbb{R})$

4. (a) Comme pour  $x \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $f \in C_b(\mathbb{R})$ ,  $t \rightarrow f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $[x, +\infty[$ , par suite  $\Phi_f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

De plus,  $|\Phi_f(x)| \leq \|f\|_{\infty} |\Phi_{\mathbb{I}}(x)| \leq M \|f\|_{\infty}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ .

De même  $|x\Phi_f(x)| \leq \|f\|_{\infty} |x\Phi_{\mathbb{I}}(x)| \leq M' \|f\|_{\infty}$ .

(b) Si  $f \in H$  alors  $\int_x^{+\infty} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\int_{-\infty}^x f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ . Par suite

$$\Phi_f(-x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-x}^{+\infty} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{-x} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

par changement de variable affine  $u = -t$ , on obtient

$$\Phi_f(-x) = -e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} f(-u)e^{-\frac{u^2}{2}} du = -\Phi_{\tilde{f}}(x).$$

Donc pour  $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} |\Phi_f(-x)| &= |\Phi_{\tilde{f}}(x)| \leq M \|\tilde{f}\|_{\infty} = M \|f\|_{\infty} \text{ et} \\ |-x\Phi_f(-x)| &= |x\Phi_{\tilde{f}}(x)| \leq M' \|f\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Ce qui donne les majorations demandées sur  $\mathbb{R}$ .

5. Pour  $f \in C_b(\mathbb{R})$ ,  $|T(f)(x)| \leq M \|f - I_f\|_{\infty} \leq 2M \|f\|_{\infty}$  et  $|xT_f(x)| \leq 2M' \|f\|_{\infty}$ .

$T$  est clairement linéaire,  $T$  est bien un endomorphisme continue sur  $C_b(\mathbb{R})$  puisque  $\|T_f\|_{\infty} \leq 2M \|f\|_{\infty}$ .

6.

(a) On a  $T(f)$  est le produit de deux fonctions  $C^1$ . La fonction définie par

$$\phi : x \rightarrow \int_x^{+\infty} (f(t) - I_f) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ est } C^1 \text{ et } \phi'(x) = -f(x) + I_f.$$

$$T(f)'(x) = xT(f)(x) - f(x) + I_f. \quad (1)$$



(b) La solution de l'équation homogène est donné par  $y_h(x) = ce^{\frac{x^2}{2}}$  où  $c \in \mathbb{R}$ . La solution générale de l'équation est donnée par  $y(x) = ce^{\frac{x^2}{2}} + T_f(x)$ .

7. Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|T(f)'(x)| \leq |xT(f)(x)| + |f(x) - \alpha_f| \leq 2(M' + 1)\|f\|_\infty$ . Ce qui montre que  $T_f \in C_b^1(\mathbb{R})$  pour tout  $f \in C_b(\mathbb{R})$ . L'endomorphisme  $T$  n'est pas surjectif puisque la fonction  $x \mapsto \frac{|x|}{1+|x|}$  ou  $x \mapsto \cos(x^2) \in C_b(\mathbb{R})$  n'a pas d'antécédant par  $T$  car elle n'appartient pas à  $C_b^1(\mathbb{R})$ .

## Etude spectrale de $T$

8. Clairement  $T(\mathbb{I}) = 0$  donc 0 est une valeur propre associée à  $T$ . Soit  $f \in \ker T$ , alors  $T_f = 0$  donc  $0 = f(x) - I_f$  par suite  $f(x) = I_f$  pour tout  $x$ . Inversement si  $f$  est constante alors  $T_f = 0$ .  $\ker T = \text{vect}(\mathbb{I}) = \{\text{fcts constantes}\}$ .
9. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $T$  alors il existe  $f$  non nulle telle que  $T(f) = \lambda f$ . Comme  $|Tf(x)| = |\lambda||f(x)| \leq 2M\|f\|_\infty$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , donc  $|\lambda|\|f\|_\infty \leq 2M\|f\|_\infty$  ce qui donne  $|\lambda| \leq 2M$ .
- 10.
- (a)  $|S(f)(x) - S(g)(x)| = |\lambda||T(f)(x) - T(g)(x)| \leq 2M|\lambda|\|f - g\|_\infty$  et  $k = 2M|\lambda| < 1$ .
- (b) On a  $|f_1(x) - f_0(x)| = |h(x)| \leq \|h\|_\infty$ . Supposons le résultat vrai à l'ordre  $n - 1$ .  
On a  $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = |S(f_n)(x) - S(f_{n-1})(x)| \leq k\|f_n - f_{n-1}\|_\infty \leq k^n\|h\|_\infty$  d'après l'hypothèse de récurrence.  
Comme la série de terme général  $k^n\|h\|_\infty$  converge on en déduit la convergence normale donc uniforme de la série  $\sum (f_{n+1} - f_n)$ .
- (c) Soit  $f$  la somme de cette série, alors  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (f_{k+1}(x) - f_k(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .  
Par suite  $f$  est la limite uniforme de  $(f_n)_n$ .  
Comme  $S(f_n) = f_{n+1}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (h + \lambda T(f_n)) = h + \lambda T(f)$ , par continuité de l'endomorphisme  $T$ , on en déduit que  $h + \lambda T(f) = f$ .

## Restriction de $T$ à $C_b^1(\mathbb{R})$

11. Si  $f \in C_b^1(\mathbb{R})$ , comme  $T(f)'(x) = xT(f)(x) - f(x) + I_f$  on voit que  $T(f)'$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $T(f)''(x) = T(f)(x) + xT(f)'(x) - f'(x)$ .
12. On a

$$\begin{aligned} |T(f)''(x)| &\leq |T(f)(x)| + |xT(f)'(x)| + |f'(x)| \leq 2M\|f\|_\infty + C_1N(f) + \|f'\|_\infty \\ &\leq (\max(2M, 1) + C_1)N(f). \end{aligned}$$

— D'après l'inégalité d'accroissement finies appliqués à  $T(f)'$  on a l'inégalité

$$|T_f'(x) - T_f'(y)| \leq CN(f)|x - y| \quad (2)$$

- La formule de Taylor Lagrange assure l'existence d'un élément  $c$  entre  $x$  et  $y$  vérifiant
- $$T(f)(x) - T(f)(y) - (x - y)T(f)'(y) = \frac{(x - y)^2}{2} T''(f)(c). \text{ Donc}$$

$$|T(f)(x) - T(f)(y) - (x - y)T(f)'(y)| \leq \frac{|T''(f)(c)|}{2} (x - y)^2 \leq \frac{CN(f)}{2} (x - y)^2.$$

On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale qui s'écrit :

$$T(f)(x) = T(f)(y) + (x - y)T(f)'(y) + \int_y^x (x - t)T(f)''(t)dt$$

Donc

$$|T(f)(x) - T(f)(y) - (x - y)T(f)'(y)| \leq \int_y^x (x - t) |T(f)''(t)| dt \leq \frac{CN(f)}{2} (x - y)^2. \quad (3)$$

## Applications

13.  $\mathbb{E}(X_n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par linéarité de l'espérance on a  $\mathbb{E}(\mathcal{M}_n) = 0$ . La variance  $\mathbb{V}(X_n) = 1$ , par indépendances des variables aléatoires  $X_n$  on en déduit que

$$\mathbb{V}(\mathcal{M}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_n) = 1.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . La variable aléatoire  $\mathcal{M}_n$  admet une variance finie, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient,

$$(P(|\mathcal{M}_n| \geq \varepsilon) = P(|\mathcal{M}_n - \mathbb{E}(\mathcal{M}_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(\mathcal{M}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

14. On pourra poser  $X'_n = \frac{1}{2}(X_n + 1) \sim \beta\left(\frac{1}{2}\right)$ . Donc  $Y'_n = X'_1 + X'_2 + \dots + X'_n$  suit la loi binomiale de paramètre  $\left(n, \frac{1}{2}\right)$ . Or  $S_n = 2Y'_n - n$  par suite les valeurs prises par  $S_n$  sont  $\{2k - n, 0 \leq k \leq n\}$  et

$$P(S_n = 2k - n) = P(Y'_n = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}.$$

Autrement, la variable  $X_n$  prend la valeur 1 ou  $-1$ , alors  $S_n$  prend les valeurs

$$\left\{ s = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i : (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \right\}$$

Pour  $s$  fixé,

$$(S_n = s) = \bigsqcup_{\substack{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \\ s = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i}} (X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n)$$

Si  $s = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$  alors  $s$  est somme de  $k$  valeurs égales à 1 et  $(n - k)$  valeurs égales à  $-1$ , donc  $s = 2k - n$ . Pour  $k$  fixé par indépendance on a

$$P(S_n = 2k - n) = \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \\ s = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i}} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \text{ Comme on a } \binom{n}{k} \text{ n-uplet } (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \text{ tel}$$

que  $s = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$  alors

$$P(S_n = 2k - n) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}.$$

15. D'après l'égalité (1) on a  $-f(\mathcal{M}_n) + I_f = T'_f(\mathcal{M}_n) - \mathcal{M}_n T_f(\mathcal{M}_n)$ . Par linéarité de l'espérance, on en déduit  $I_f - \mathbb{E}(f(\mathcal{M}_n)) = \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_n)) - \mathbb{E}(\mathcal{M}_n T_f(\mathcal{M}_n))$ .

16. En utilisant l'inégalité (3), on a

$$\left| T_f(\mathcal{M}_n) - T(f)(\mathcal{M}_{n,i}) - \frac{X_i}{\sqrt{n}} T'_f(\mathcal{M}_{n,i}) \right| \leq \frac{CN(f)}{2n} |X_i|^2$$

En multipliant par  $|X_i|$  on obtient l'inégalité demandée.

Comme  $E(X_i T_f(\mathcal{M}_{n,i})) = E(X_i) \cdot E(T_f(\mathcal{M}_{n,i})) = 0$  car  $X_i$  et  $T_f(\mathcal{M}_{n,i})$  sont indépendantes. De plus

$$\mathbb{E} \left( \frac{X_i^2}{\sqrt{n}} T'_f(\mathcal{M}_{n,i}) \right) = \mathbb{E}(X_i^2) \mathbb{E} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} T'_f(\mathcal{M}_{n,i}) \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_{n,i})),$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}(X_i T_f(\mathcal{M}_n) - X_i T_f(\mathcal{M}_{n,i})) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}} T'_f(\mathcal{M}_{n,i}) \right| \\ & \leq \mathbb{E} \left( \left| X_i T_f(\mathcal{M}_n) - X_i T_f(\mathcal{M}_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}} T'_f(\mathcal{M}_{n,i}) \right| \right) \leq \frac{CN(f)}{2n} \mathbb{E}(|X_i|^3) \end{aligned}$$

et donc  $\left| \mathbb{E}(X_i T_f(\mathcal{M}_n) - \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_{n,i}))) \right| \leq \frac{CN(f)}{2n}$  car  $\mathbb{E}(|X_i|^3) = 1$ .

17. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathcal{M}_n T_f(\mathcal{M}_n)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_{n,i})) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left( \frac{X_i}{\sqrt{n}} T_f(\mathcal{M}_n) \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_{n,i})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i T_f(\mathcal{M}_n)) - \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_{n,i})) \right) \end{aligned}$$

Par suite

$$\left| \mathbb{E}(\mathcal{M}_n T_f(\mathcal{M}_n)) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_{n,i})) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{CN(f)}{2n} = \frac{CN(f)}{2\sqrt{n}}$$

18. En utilisant l'inégalité (2), on a pour tout  $1 \leq i \leq n$

$$\left| T'_f(\mathcal{M}_n) - T'_f(\mathcal{M}_{n,i}) \right| \leq \frac{CN(f) |X_i|}{\sqrt{n}}$$

On appliquant l'espérance on obtient

$$\left| \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_n)) - \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_{n,i})) \right| \leq \frac{CN(f)}{\sqrt{n}}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_n)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_{n,i})) \right| &= \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_n)) - \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_{n,i}))) \right| \\ &\leq \frac{CN(f)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

19. On écrit :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f(\mathcal{M}_n)) - I_f| &= \left| \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_n) - \mathcal{M}_n T_f(\mathcal{M}_n)) \right| \\ &\leq \left| \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_n)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_{n,i})) \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E}(\mathcal{M}_n T_f(\mathcal{M}_n)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(T'_f(\mathcal{M}_{n,i})) \right| \\ &\leq \frac{3CN(f)}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

20. On pose  $f(x) = \cos(\pi x)$ . Par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(\mathcal{M}_n)) &= \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sum_{k=0}^n \cos\left(\pi \frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right) P(S_n = 2k-n) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos\left(\pi \frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

D'après les questions 19 et 2.c, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos\left(\pi \frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right) = I_f = e^{-\frac{\pi^2}{2}}$ .